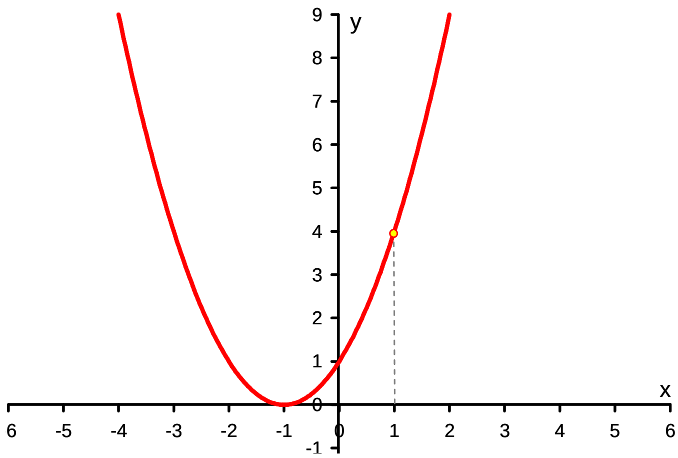
Sea la función *f*: ℝ→ ℝ definida por *f*(x) = x² + 2x + 1. Determinar: a) la ecuación de la recta tangente a la curva y = *f*(x) en el punto de abscisa x=1. b) la ecuación de la recta tangente a la curva y = *f*(x) que pasa por el punto (-2, 0).

(a) El primer apartado de este problema es el típico de rectas tangentes. Para resolverlo hay que tener en cuenta dos cosas: **1)** que la pendiente de la recta tangente a una curva es siempre el valor de la derivada en el punto de tangencia, y **2)** que como el punto de tangencia (x_0, y_0) pertenece tanto a la recta como a la curva, sus coordenadas x e y deben verificar simultáneamente la ecuación de la recta y la de la curva. Así que: **1)** la pendiente de la recta la hallamos como $m = f'(x_0)$, y **2)** la ordenada en el origen la hallamos imponiendo la condición de que el punto de tangencia pertenezca a la recta; esto se puede hacer de dos maneras: o bien sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación explícita de la recta ($y = mx + b$) y despejando la ordenada en el origen (b) a partir de m y de las coordenadas (x_0, y_0), o bien a partir de la ecuación punto-pendiente de la recta: $y - y_0 = m(x - x_0)$.



1) Hallamos la pendiente:

$f'(x) = 2x + 2$ → Como el punto de tangencia es el que tiene x=1 → $m = f'(1) = 4$

2) Hallamos la ordenada en el origen:

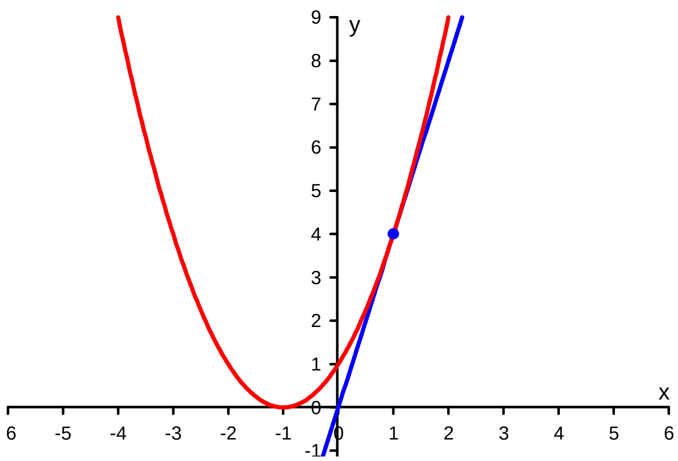
El punto de tangencia es el de x=1, y su coordenada y es: $y = f(1) = 4$ → (1, 4)

Este punto pertenece a la recta $y = mx + b$, de modo que $4 = 4 \cdot 1 + b \rightarrow b = 0$

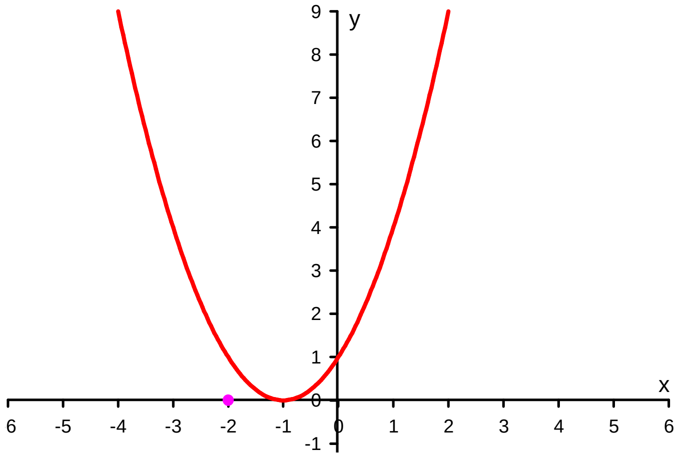
Por tanto, la recta es **y = 4x**.

Alternativamente, puede usarse la ecuación punto-pendiente de la recta:

$y - 4 = 4(x - 1) = 4x - 4 \rightarrow y = 4x - 4 + 4 = 4x \rightarrow$ **y = 4x**



(b) El segundo apartado es más complicado, porque el punto por el que nos piden que debe pasar la recta tangente no pertenece a la curva, así que *a priori* no conocemos el punto de tangencia. Pero aplicaremos las mismas condiciones: **1)** la recta tiene por pendiente el valor de la derivada en el punto de tangencia, y **2)** debe pasar por el punto de tangencia. Esta vez, además, debe verificarse una tercera condición adicional: **3)** que pase por el punto externo a la curva que nos dan.



1) Condición de la pendiente:

La pendiente de la recta tangente será: $m = f'(x_0) = 2x_0 + 2$.

2) El punto de tangencia pertenece a la recta:

Como no conocemos las coordenadas exactas del punto de tangencia, lo expresaremos de manera genérica: (x_0, y_0). Como pertenece a la curva, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la función: $y = f(x) \longrightarrow y_0 = f(x_0) \longrightarrow$ $\mathbf{(x_0, x_0^2 + 2x_0 + 1)}$.

3) El punto externo también pertenece a la recta:

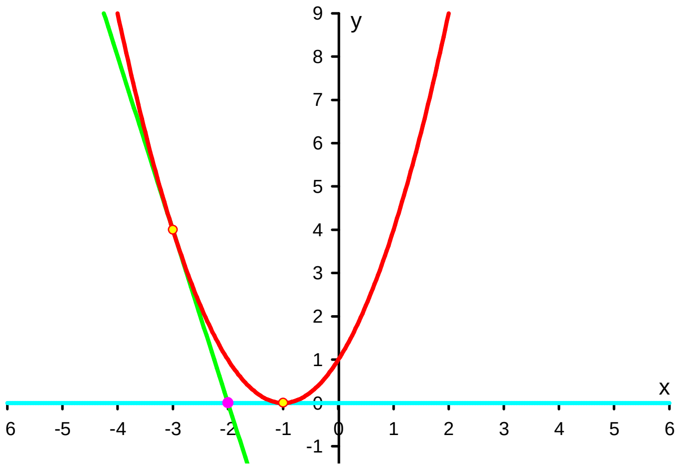
Usaremos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ siendo un punto el de tangencia $(x_0, x_0^2 + 2x_0 + 1)$ y el otro el externo $(-2, 0)$. Entonces, tenemos:

$$\frac{y - 0}{x_0^2 + 2x_0 + 1 - 0} = \frac{x + 2}{x_0 + 2} \longrightarrow y = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0 + 2}(x + 2) = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0 + 2}x + \frac{2x_0^2 + 4x_0 + 2}{x_0 + 2}$$

Se muestra englobado en línea roja discontinua el coeficiente de la x, que es la pendiente de la recta, *m*, y en azul el término independiente, que es la ordenada en el origen, *b*. Igualando la pendiente obtenida en esta ecuación con la obtenida a partir de la derivada, tenemos:

$$m = 2x_0 + 2 = \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0 + 2} \longrightarrow 2x_0 + 6x_0 + 4 = x_0^2 + 2x_0 + 1 \longrightarrow x_0^2 + 4x_0 + 3 = 0$$

Esta ecuación de segundo grado nos da como resultado dos posibles valores para la abscisa del punto de tangencia: $x_0 = -1$ y $x_0 = -3$. Esto significa que hay **dos puntos** en la curva en los que la tangente pasaría por el punto externo $(-2, 0)$. Sustituyendo estos valores de x en la ecuación de la curva, tenemos que los dos puntos de tangencia posibles son: **(-1, 0)** y **(-3, 4)**. La ecuación de cada recta tangente la podemos obtener de dos maneras: o bien sustituyendo cada valor de x_0 en la ecuación que tenía los términos *m* y *b* indicados con los globos rojo y azul (obteniéndose la ecuación explícita de las rectas tangentes), o bien sustituyendo en la ecuación de la recta que pasa por dos puntos con (x_1, y_1) = cada punto de tangencia que acabamos de obtener, y con (x_2, y_2) = (-2, 0) (el punto externo).



La ecuación de la recta que pasa por (-1, 0) y (-2, 0) es **y = 0** (se muestra en celeste) y la de la que pasa por (-3, 4) y por (-2, 0) es **y = -4x – 8** (se muestra en verde claro).