Examen de Selectividad – Matemáticas II - JUNIO 2012 - Andalucía

OPCIÓN A

1.- Sea la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$. **a) [1 punto]** Calcula las asíntotas de f. **b) [1 punto]** Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. **c) [0,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

S

a) Asíntotas verticales: $x = a$ es una A.V. de f si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Como $f(x)$ es el producto de dos funciones continuas (e^x y x-2), y no hay denominadores que puedan anularse, **no hay A.V.**

Asíntotas horizontales: $x = b$ es una A.H. de f si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Probamos:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\cdot(x-2) = (\infty \times \infty) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x\cdot(x-2) = (0 \times \infty,\ \text{ind!}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{e^x} = (\infty/\infty,\ \text{ind!, L'Hôpital}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

A.H.: **y = 0**

Asíntotas oblicuas: y = $mx + n$ es una A.O. de f si $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$, y entonces $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$. En este caso consideramos sólo el límite cuando $x\to+\infty$, dado que por la izquierda la gráfica tiene una A.H. (lo que excluye que haya también una A.O.):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-2)}{x} = (\frac{\infty}{\infty}, \text{ind!, L'H}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^x(x+2)}{1} = \lim_{x\to+\infty} e^x(x-1) = +\infty$$

(luego **no hay A.O.**)

b) Extremos relativos: son puntos de la gráfica de f donde se cumple la condición de que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = e^x(x-2) + e^x\cdot 1 = e^x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$e^x\cdot(x-1)=0$ implica que: o bien $x-1=0$, o bien $e^x=0$, pero esto sólo se cumple en el límite $x\to-\infty$. Por tanto, el único extremo relativo está en $x=1$. Hallamos la ordenada correspondiente:

$f(1) = e^1(1-2) = -e$; **(1, –e)** es el punto. Ahora determinemos si se trata de un máximo ($f''(x)<0$) o un mínimo ($f''(x)>0$):

$f''(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$, luego: $f''(1) = e > 0$, se trata de un **mínimo**.

Intervalos de crecimiento-decrecimiento: Como la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y sólo existe un extremo relativo, los intervalos de monotonía son los siguientes:

***f*(*x*) es decreciente en (-∞, 1), y creciente en (1, +∞)**

c) Puntos de inflexión: Son puntos de la gráfica donde se cumple que $f''(x)=0$.

$$f''(x) = xe^x$$

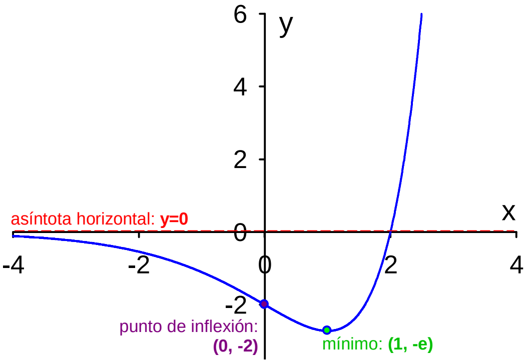
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(Al igual que antes, $e^x=0$ sólo se cumple en el límite para $x\to-\infty$)

La ordenada correspondiente es:

$f(0) = e^0(0-2) = -2$; el punto es el **(0, –2)**.

Esta vez no se pide la representación de la función, pero con estos datos se puede esbozar la gráfica:



2.- Sea f una función continua en el intervalo [2, 3] y F una primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcula: **a) [0,75 puntos]** $\int_2^3 f(x)dx$. **b) [0,75 puntos]** $\int_2^3 (5f(x)-7)dx$. **c) [1,5 puntos]** $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx$.

a) $\int_2^3 f(x)dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$.

b)

$$\int_2^3 (5f(x)-7)dx = 5\int_2^3 f(x)dx - 7\int_2^7 dx = 5[F(x)]_2^3 - 7[x]_2^3 = 5(2-1) - 7(3-2) = 5 - 7 = -2.$$

c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx =$ ...(cambio de variable: $t=F(x)$; $dt=F'(x)dx=f(x)dx$; atención a los límites de integración, que deben ser los valores correspondientes de la nueva variable t: $F(2)=1$, $F(3)=2$, quedando:) ...$= \int_1^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

3.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ **a) [1 punto]** ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? **b) [1,5 puntos]** Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

a) La matriz inversa de A no existe si $|A| = 0$, por tanto los valores k que anulen el determinante serán aquellos para los que no existe A^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2 \Rightarrow \forall k \neq \frac{1}{2}, \exists A^{-1}; \text{si } k = \frac{1}{2},\ \nexists A^{-1}.$$

b) Para k =0, A=A_0= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, y la ecuación matricial se resuelve:

$(X + I)\cdot A = A^t$; $\quad (X+I)\cdot A\cdot A^{-1} = (X+I)\cdot I = X + I = A^t\cdot A^{-1}$; $\quad \boldsymbol{X = A^t\cdot A^{-1} - I}$

Luego, en primer lugar debemos hallar la mariz inversa (A^{-1}), y a continuación usaremos esta expresión para calcular la matriz incógnita X. Apliquemos el *método de Gauss* para el cálculo de A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así, la matriz inversa A^{-1} es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para el cálculo de X tendremos:

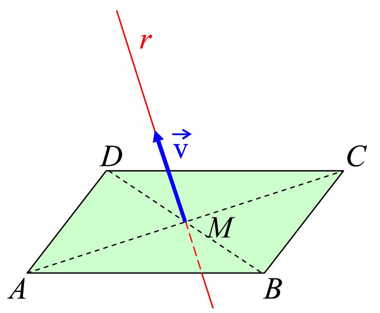
$$A^t\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

y entonces X es:

$$X = A^t\cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

4.- De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y C(0, 1, 2). **a) [1 punto]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene. **b) [0,75 puntos]** Halla el área de dicho paralelogramo. **c) [1,5 puntos]** Calcula el vértice D.

a) Hallamos las coordenadas del punto medio M del paralelogramo como el punto medio entre los vértices A y C, y calculamos el vector normal al plano que lo contiene como el producto vectorial de dos vectores apoyados en los lados contiguos conocidos del paralelogramo ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$).



$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{(2,-1,0)+(0,1,2)}{2} = \frac{(2,0,2)}{2} = (1,0,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2,1,0) - (2,-1,0) = (-4,2,0)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (0,1,2) - (-2,1,0) = (2,0,2)$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{k} + 6\vec{j} = (4,6,-4) \qquad \text{(Este es el vector director de la recta)}$$

La recta que pasa por M y es perpendicular al plano del paralelogramo es:

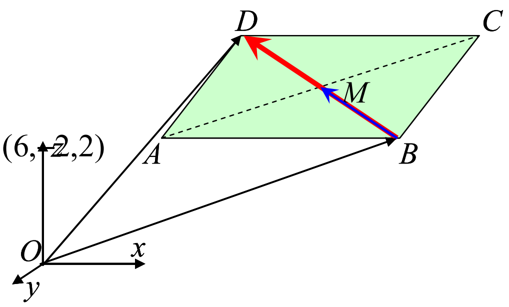
(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(4, 6, -4), donde t toma todos los valores de $\mathbb{R}$; o en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

b) El área del paralelogramo puede hallarse como el módulo del producto vectorial de los vectores apoyados en dos lados contiguos. El vector correspondiente es el mismo que hemos usado como vector director de la recta del apartado (a).

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}\,\text{u}^2$$

c) Para hallar el vértice D podemos apoyarnos en el punto M del apartado (a) (entre otras posibilidades):



$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM} = 2 \times [(1,0,1) - (-2,1,0)] = 2(3,-1,1) = (6,-2,2)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = (-2,1,0) + (6,-2,2) = (4,-1,2)$$

***D* = (4, –1, 2)**

También puede calcularse teniendo en cuenta que el vector $\overrightarrow{AD}$ es igual al vector $\overrightarrow{BC}$, luego: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

OPCIÓN B

1.- [2,5 puntos] Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot sen(x)-xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot sen(x)-xe^x}{x^2}=\left(\frac{a\cdot 0-0\cdot 1}{0}\right)(\text{ind!, L'Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos(x)-e^x-xe^x}{2x}=\frac{a-1}{0}$$

Se distinguen dos casos según el valor del parámetro a: si $a \neq 1$, el límite es infinito, pero si $a = 1$ tenemos nuevamente una indeterminación, y hay que aplicar de nuevo la *Regla de L'Hôpital*. Como el anunciado dice que el límite es finito, hay que suponer que estamos en este caso, luego $\boldsymbol{a}$ **= 1**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(x+1)e^x}{2x}=\left(\frac{0}{0},\text{ind!,L'H}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)-(x+1)e^x-e^x}{2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)-(x+2)e^x}{2}=\frac{-0-(2)\cdot 1}{2}=-1$$

2.- Sea la función f definida por $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$ para $x \neq 1$. **a) [1,25 puntos]** Halla una primitiva de f. **b) [1,25 puntos]** Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea ln(2), donde ln denota logaritmo neperiano.

a) $\int\frac{2}{x^2-1}dx$ es una integral racional, y el grado del polinomio del numerador (0) es menor que el del denominador (2).

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}$$

Para $x = +1$: $2A = 2$, luego $\boldsymbol{A = 1}$; para $x = -1$, $-2B = 2$, luego $\boldsymbol{B = -1}$; luego:

$$\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-1}{x+1}dx=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C;$$

Una primitiva posible es $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ (para $C = 0$).

b) Área del recinto:

$$A=\int_2^k\frac{2}{x^2-1}dx=\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^k=\ln\frac{k-1}{k+1}-\ln\frac{2-1}{2+1}=\ln\frac{3(k-1)}{k+1}$$; imponemos que valga ln2:

$$\ln\frac{3(k-1)}{k+1}=\ln 2\Rightarrow\frac{3(k-1)}{k+1}=2\Rightarrow 3k-3=2k+2\Rightarrow k=5$$

3.- Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ 3y+2z=2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)y+z=\lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 1. **b) [1 punto]** Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución. **c) [0,5 puntos]** ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución (-1/2, 0, 1/2)?

a) Para λ = 1 el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \\ 3x+z=1 \end{cases} \text{ o, en forma matricial: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para estudiar la posible solución o soluciones del sistema, lo discutimos conforme al *Teorema de Rouché-Fröbenius*. Para que existan soluciones el sistema debe ser compatible, es decir, deben coincidir el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada.

<u>Rango de *C*</u>: $rg(C)\geq 1, rg(C)\geq 2.$ Veamos si $rg(C)=3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(C)=2$$

<u>Rango de *A*</u>: $rg(A)\geq 1, rg(A)\geq 2.$ Veamos los determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A)=2$$

Así que el sistema es **compatible**. Como los rangos de *C* y *A* no coinciden con el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**. Ello significa que la solución no es única, sino que existen infinitas soluciones, porque las tres ecuaciones no son linealmente independientes. Como no hay dos ecuaciones que sean proporcionales entre sí, las tres son dependientes entre sí, y puede eliminarse una cualquiera de ellas, por ejemplo la primera. Quedaría así:

$$\begin{cases} 3y+2z=5 \\ 3x+z=1 \end{cases}$$

Como el sistema tiene 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones linealmente independientes, la solución no es única. Para resolverlo, asignamos un parámetro a una de las incógnitas, por ejemplo a la x: $\boldsymbol{x=\lambda}$. Entonces:

$$3\lambda+z=5 \Rightarrow z=5-3\lambda$$

$$3y+2z=3y+2(5-3\lambda)=3y+10-6\lambda=1 \Rightarrow y=\frac{-9-6\lambda}{3}=-3-2\lambda$$

Así que la solución del sistema para $\lambda = 1$ es la recta siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$

b) Para que el sistema tenga una única solución, debe ser un sistema compatible determinado, y para ello el rango de la matriz de los coeficientes debe coincidir con el de la ampliada y con el número de incógnitas (3). Para que el rango de C sea 3, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser **no-nulo**; si el determinante de C es 0, entonces el rango de C no es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 3 + 6 + 0 - 9 - 2(\lambda - 1) - 0 = -2\lambda + 2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$$

Así pues, el rango de C es: $\begin{cases} 2 \text{ si } \lambda = 1 \\ 3 \text{ si } \lambda \neq 1 \end{cases}$

Estudiemos el rango de la matriz ampliada A según estos casos. Si $\lambda = 1$ la matriz del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y todos los determinantes de orden 3 contenidos en ella son nulos, como hemos comprobado en el apartado anterior; ello es debido a que las filas son linealmente dependientes (obsérvese que $F_3 = 3F_1 - F_2$). Entonces, si $\lambda = 1$, $rg(A) = rg(C) = 2$ (SCI) el rango de A también es 2, mientras que si $\lambda \neq 1$ $rg(A) = rg(C) = 3$ (SCD). Por tanto: para que el sistema tenga una única solución, $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$.

c) Si el punto (–½, 0, ½) es una solución del sistema para algún valor de λ, entonces estos valores de las variables x, y, z deben satisfacer las ecuaciones del sistema para un mismo valor de λ. Dicho de otra manera: si sustituimos estos valores (x, y, z) en las ecuaciones del sistema, el valor de λ que cumpla las tres ecuaciones debe ser el mismo:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = -1 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\lambda + 3 \Rightarrow \lambda = -1 \\ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (\lambda - 1) \cdot 0 + \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Efectivamente, el punto (–½, 0, ½) es una solución del sistema para el valor $\boldsymbol{\lambda = -1}$.

4.- Sean r y s las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$ $\quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$

a) [1,25 puntos] Determina el punto de intersección de ambas rectas. **b) [1,25 puntos]** Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

a) Para hallar el punto de corte de dos rectas se pueden seguir diferentes métodos. Uno de ellos es pasar las dos rectas a *paramétricas*, e imponer que para un cierto punto de cada recta, coincidan la coordenada x, la y y la z (tal es el punto de corte); se obtienen así tres ecuaciones en dos incógnitas, que son los dos parámetros. Cuando tengamos el valor de los parámetros, sólo hay que sustituir en las ecuaciones paramétricas de una cualquiera de las dos rectas, y resulta el punto de corte.

Para pasar a paramétricas la recta r dada en forma implícita extraemos el vector director como el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x+y-z=6 \Rightarrow \vec{n_1}=(1,1,-1) \\ x+z=3 \Rightarrow \vec{n_2}=(1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-1)$$

Un punto que pertenezca a r se puede obtener como sigue: para x = 0, en la segunda ecuación tenemos: 0 + z = 3, luego z = 3; y en la primera: 0 + y – 3 = 6, luego y = 9. Un punto de r es **(0, 9, 3)**, y las ecuaciones paramétricas de r y s son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0+t \\ y = 9-2t \\ z = 3-t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Las coordenadas del punto de corte deben satisfacer las ecuaciones de las dos rectas:

$$\left. \begin{array}{c} t = 1-\lambda \\ 9-2t = -1+6\lambda \\ 3-t = 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ t = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1,11,4)$$

Y hay otra manera, menos evidente, que es pasar las dos rectas a *implícitas*, y resolver el sistema formado por los cuatro planos resultantes. La ecuación de r ya nos la dan en forma implícita, y la de s la pasamos a esta forma igualando dos a dos los tres miembros de la doble igualdad de la ecuación continua:

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} \begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow 2x+z=2 \\ \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow y-3z=-1 \end{cases}$$

Ahora cada recta está dada como la intersección de dos planos, y el punto intersección de las dos rectas es también el punto intersección de los cuatro planos; o sea, es la solución de un sistema de 4 ecuaciones en 3 incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y-z=6 \\ x+z=3 \\ 2x+z=2 \\ y-3z=-1 \end{array} \right\} \text{que en forma matricial es:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

Si los cuatro planos cortan en un punto el sistema es SCD, y ello implica que los rangos de la matriz de los coeficientes y la ampliada son iguales al número de incógnitas: o sea $rg(C) = rg(A) = 3$. En este caso, podemos prescindir de una de las ecuaciones (y volver a comprobar que el sistema sigue siendo SCD). Quitemos la primera, que es la fila que no contiene ceros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Rango de C: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2-1=+1 \neq 0, (\text{luego } rg(C) = rg(A) = 3)$

Resolvemos por el *método de Cramer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{+1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{+1} = \frac{11}{1} = 11; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{+1} = \frac{4}{1} = 4$$

La solución es el punto **(–1, 11, 4)**.

b) Podemos calcular la ecuación del plano que las contiene a partir de un punto cualquiera de una de las rectas y de los vectores directores de las dos rectas (que serán los vectores directores del plano):

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-11 & z-4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 4z = 3$$