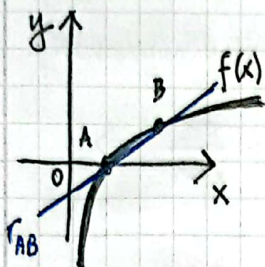


BLOQUE A: **ANÁLISIS**

① Sea $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) [1.5] Determina, si existe, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .



La pendiente de la recta que pasa por A y B es: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$.

Si en algún punto C de la gráfica la recta tangente tiene esta pendiente, la derivada en ese punto coincide con el valor de la pendiente $\frac{1}{e-1}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \rightarrow x = e-1 \rightarrow y = f(e-1) = \ln(e-1) \rightarrow \text{el punto es } (e-1, \ln(e-1)).$$

$$\text{y la recta es: } y - \ln(e-1) = \frac{1}{e-1}(x - e + 1) = \frac{x}{e-1} - \frac{e-1}{e-1} = \frac{x}{e-1} - 1;$$

$$\boxed{y = \frac{1}{e-1}x - 1 + \ln(e-1)}$$

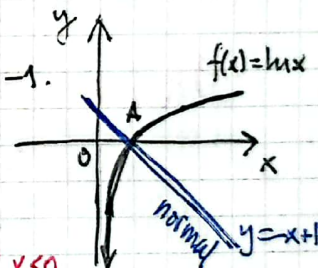
b) [1] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

Para hallar la ecuación de la recta tangente se necesitan el punto de tangencia y la pendiente (que es la derivada en el punto). Y para la recta normal, también, solo que la pendiente de la normal es la inversa cambiada de signo de la derivada.

El punto $A(1,0)$ ya lo tenemos.

La pendiente de la normal es: $m_n = -\frac{1}{f'(1)} = \left(-\frac{1}{1/x}\right)_{x=1} = -1$.

$$y - 0 = -1(x - 1) = -x + 1 \rightarrow \text{la normal es: } \boxed{y = -x + 1}$$



② Considera la función continua f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - a \sin x}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula a y b .

La función $f(x)$ es continua en $x=0$ si $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (b \cos x - 1) = b \cdot 1 - 1 = \boxed{b-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - a \sin x}{x^3} = \left(\frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminación, L'Hôpital} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - a \cos x}{3x^2} =$$

$$= \left(\frac{1-0-a}{0} \rightarrow \infty, \text{ a no ser que } 1-a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=1} \right) \text{ (asumimos, pues, que } a=1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\cos x} - x \cancel{\sin x} - \cancel{\cos x}}{3x^2} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{3x} = \left(\frac{0}{0}, \text{ L'Hôpital} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

Para que $f(x)$ sea continua:

$$-\frac{1}{3} = b-1; b = -\frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{a=1}$$

$$\boxed{b=\frac{2}{3}}$$

BLOQUE B: INTEGRALES

- ③ Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq -1, x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$.

Una primitiva de $f(x)$ es una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$, o sea: $F(x) = \int f(x) dx$. Para cierto valor de la constante de integración C , se debe verificar que $F(0) = 1$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx \quad (\text{Racional con grado de numerador} \geq \text{grado denominador}).$$

Hay que dividir:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2 \\ x^2 - 1 \end{array} \Rightarrow \frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$F(x) = \int \left(x + \frac{x+2}{x^2-1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} dx = \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} dx = \dots \quad \begin{cases} \text{para } x=1 \dots 3 = 2B \dots B = \frac{3}{2} \\ \text{para } x=-1 \dots 1 = -2A \dots A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + C = \frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{(x-1)^3}{x+1} \right| + C$$

Para hallar "C": $F(0) = 1 \rightarrow F(0) = 0 - \frac{1}{2} \ln|1| + \frac{3}{2} \ln|-1| + C = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0 + C = C = 1$.

$C=1 \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + 1$

Guillermo Estivill
Clases Particulares
675890160

- ④ Halla la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos x$ y cuya gráfica pase por los puntos $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(\pi, 2\pi)$.

Conforme al teorema fundamental del cálculo: $f'(x) = \int f''(x) dx = \int x \cos x dx =$

PARTES: $\begin{cases} u=x \dots du=dx \\ dv=\cos x dx \dots v=\sin x \end{cases} = x \sin x - \int \sin x dx = \boxed{x \sin x + \cos x + C}$

Y también: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (x \sin x + \cos x + C) dx = \int x \sin x dx + \int \cos x dx + \int C dx =$

= PARTES $\begin{cases} u=x \dots du=dx \\ dv=\sin x dx \dots v=-\cos x \end{cases} = -x \cos x + \int \cos x dx + \sin x + Cx + D =$

$$= -x \cos x + \sin x + \sin x + Cx + D = -x \cos x + 2 \sin x + Cx + D.$$

Si la función pasa por esos puntos: $\begin{cases} f(0) = \frac{\pi}{2} \rightarrow -0 + 0 + 0 + D = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{D = \frac{\pi}{2}} \\ f(\pi) = 2\pi \rightarrow -\pi \cos \pi + 2 \sin \pi + C\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow \end{cases}$

$$\rightarrow +\pi + C\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow \left(C + \frac{3}{2} \right) = 2$$

$$C = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = -x \cos x + 2 \sin x + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}}$$

BLOQUE C: ALGEBRA

- 5) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Calcula A^{2024} . b) Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2 X A + I = 0$.

a) Multiplicar la matriz A por n misma 2024 veces no es viable, investiguemos si podemos extraer una regla cíclica o de recurrencia a partir de las primeras potencias

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego: $A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 X A + I = 0$; $A^2 X A = -I$; $A^2 X = -I A^{-1}$; $A X = -A^{-1} A^{-1}$; $X = (A^{-1})^3$

$$|A| = 1; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & -2/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Considera el sistema: $\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases} \rightarrow$ matricialmente: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) discute el sistema según los valores de k .

El teorema de Rouché-Frobenius permite clasificar los sistemas de ecuaciones lineales por su número de soluciones, según el rango de la matriz de coeficientes A y la ampliada A^* .

El sistema es compatible (tiene soluciones) si $Rg(A) = Rg(A^*)$.

- la solución es única (sist. compatible determinado) si $Rg(A) = Rg(A^*) = 3$ (nº indeterminadas).
- Tiene infinitas soluciones (sist. comp. indeterminado) si $Rg(A) = Rg(A^*) \neq 3$

y no tiene soluciones (sist. incompatible) si $Rg(A) \neq Rg(A^*)$.

Los valores k que hacen que $Rg(A) \neq 3$ son los que hacen que $|A| = 0$:

$$|A| = 1 + (k-1)^2 - 1 - k + 1 = 1 + k^2 - 2k + 1 - k = k^2 - 3k + 2$$

$$|A| = 0 \text{ si } k^2 - 3k + 2 = 0; k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow k = 2 \text{ o } k = 1.$$

$Rg(A) = 3 = Rg(A^*)$ (SCD) si $k \neq 1, k \neq 2$.

$A =$ matriz de coeficientes
 $A^* =$ matriz ampliada.

Si $k=1$, el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \text{con dos ecuaciones iguales: } \text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 \text{ (S.C.I.)}$$

Si $k=2$, queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \text{con dos filas iguales en } A \text{ (Rg}(A)=2) \text{ pero distintas en } A^* \text{ (Rg}(A^*)=3): \text{S. incompatible.}$$

$k \neq 1, k \neq 2 \dots$	SCD
$k=1 \dots$	SCI
$k=2 \dots$	S.I.

b) Para $k=1$, resuelve el sistema, si es posible.

¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calculala.

En caso negativo, justifica la respuesta.

$$\begin{array}{l} y+z=1 \\ y+z=1 \\ x+z=0 \end{array} \Rightarrow \text{Pasamos las } z \text{ a los términos independientes} \Rightarrow \begin{array}{l} y=1-z \\ x=-z \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$y=1-\lambda=0 \text{ para } \lambda=1 \dots \boxed{x=-1, y=0, z=1}$$

BLOQUE D: GEOMETRÍA

Guillermo Estivill
Clases Particulares
de Ciencias
675 890 160
<http://qui-mi.com/>

8) Considera las rectas: $r \equiv \begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s .

Si extraemos de cada recta un punto y un vector director, al comparar las direcciones de los directores y el producto mixto de los directores y el vector que va del punto de una al de la otra podremos distinguir los casos: paralelas, coincidentes, secantes, o se cruzan.

Para r : si $x=0: z=0 \dots A(0,0,0)$.

Para s : si $x=0 \dots y=-z \dots C(0,-7,0)$

si $x=1: z=2 \dots B(1,0,2)$

si $y=0 \dots x=-z \dots D(-7,0,0)$

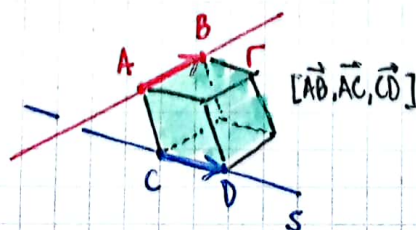
director: $\vec{AB} = (1,0,2)$

director: $\vec{CD} = (-7,7,0) \sim \text{o bien } (-1,1,0)$

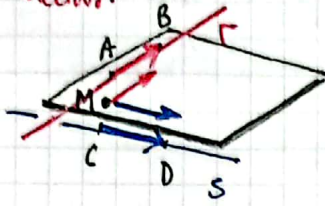
• ¿Son paralelos los directores? $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ si: $\frac{1}{-7} = \frac{0}{7} = \frac{2}{0} \Rightarrow \text{NO} \rightarrow \text{Secantes o se cruzan.}$

• Si son secantes $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{CD}$ son coplanares, y $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{CD}] = 0$:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{CD}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -98 \neq 0 \leftrightarrow \text{no coplanares} \leftrightarrow \text{no secantes: se cruzan!}$$



b) Calcular la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.



Para obtener la ecuación de un plano necesitamos un punto por el que pase y dos vectores directores, o bien un punto y un vector normal. Si el plano es paralelo a las dos rectas, los dos vectores directores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ (u otros proporcionales a ellos) pueden usarse como directores.

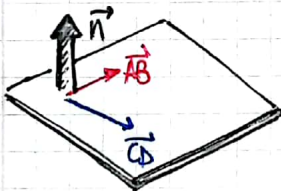
El plano equidista de ambas rectas si lo hacemos pasar por el punto medio M entre un punto cualquiera de r y un punto cualquiera de s , por ejemplo el punto medio del segmento AC . O bien si imponemos la condición de equidistancia a un punto de r y otro de s , pero esta opción es más compleja en cálculo (un poco más compleja, tampoco mucho).

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} = \frac{(0,0,0) + (0,-7,0)}{2} = (0, -\frac{7}{2}, 0) \rightarrow M(0, -\frac{7}{2}, 0)$$

$$\begin{vmatrix} x & y + \frac{7}{2} & z \\ 1 & 0 & 2 \\ -7 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad -14(y + \frac{7}{2}) + 7z - 14x = 0; \quad -14x - 14y - 49 + 7z = 0;$$

$$\boxed{2x + 2y - z + 7 = 0}$$

Otra manera: el vector normal del plano es el producto vectorial de los dos directores (porque debe ser perpendicular a ambas), y sus componentes nos dan los coeficientes de x, y, z en la ecuación general del plano:



$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -7 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -14\vec{j} + 7\vec{k} - 14\vec{i} = (-14, -14, 7) \sim (2, 2, -1)$$

(porque nos vale igualmente un director negativo, ya que sólo interesa por su dirección).

$$\boxed{\pi \equiv 2x + 2y - z + d = 0}$$

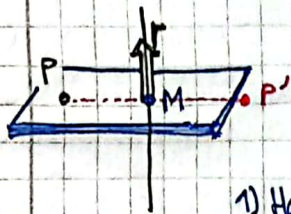
Condición de equidistancia a $A(0,0,0)$ y a $C(0,-7,0)$:

$$d(A, \pi) = \left| \frac{0+0+0+d}{\sqrt{4+4+1}} \right| = d(C, \pi) = \left| \frac{0-14+0+d}{\sqrt{4+4+1}} \right| \Rightarrow \frac{d}{3} = \pm \frac{d-14}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = d-14 \quad (\text{NO}) \\ d = -d+14 \dots 2d = 14 \dots \end{cases}$$

$$\boxed{d=7} \dots \boxed{\pi \equiv 2x + 2y - z + 7 = 0}$$

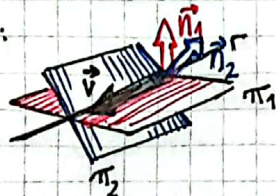
- 7) a) Halla el simétrico de $P(2,2,1)$ respecto a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$



El punto simétrico se localiza en la dirección perpendicular a r desde P , a la misma distancia.

1) Hallamos un plano auxiliar $\pi_a \perp r / \pi_a \ni P$

El director de r es el $\vec{n}$ del plano; pero como no da r en implícita el vector director es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta:



$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (1, 1, 1)$$

$$\pi_a \equiv x + y + z + d = 0$$

$$P(2,2,1) \in \pi_a: 2+2+1+d=0; d=-5; \pi_a \equiv x+y+z-5=0$$

2) Hallamos la intersección de r con π_a : $M \equiv r \cap \pi_a$.

Para expresar r en paramétricas necesitamos un punto de ella, p.ej en $z=0$...

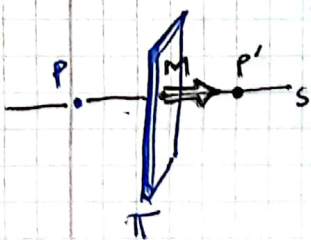
$$y=1 \dots x-2=2; x=4 \dots A(4,1,0) \dots r \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$$

$$\text{El cte en } \pi: 4+t+1+t+t-5=0; 3t=0; t=0 \Rightarrow M=(4,1,0)$$

3) Suponemos que M es el punto medio entre $P(2,2,1)$ y $P'(x,y,z)$: $\vec{OM} = \frac{\vec{OP} + \vec{OP'}}{2}$;

$$2(4,1,0) = (2,2,1) + (x,y,z); (x,y,z) = (8,2,0) - (2,2,1) = (6,0,-1) \Rightarrow P'(6,0,-1)$$

b) Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto al plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.



PROCEDIMIENTO SIMILAR.

1) Hallamos una recta auxiliar $s \perp \pi / s \ni Q$:

El vector normal del plano es el director de s : $\vec{n} = (1, -2, 1) = \vec{u}$

$$s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases}$$

2) M es la intersección de s con π :

$$1+\lambda-2(-1-2\lambda)+(-3+\lambda)+6=0; 1+\lambda+2+4\lambda-3+\lambda+6=0; 6\lambda+6=0; \lambda=-1$$

$$\text{Luego: } M \equiv \begin{cases} m_1 = 1-1=0 \\ m_2 = -1+2=1 \\ m_3 = -3-1=-4 \end{cases} \Rightarrow M(0,1,-4)$$

$$3) \vec{OM} = \frac{\vec{OQ} + \vec{OQ'}}{2} \Rightarrow (0,1,-4) = \frac{(1,-1,-3) + (x,y,z)}{2}; (0,2,-8) = (1,-1,-3) + (x,y,z);$$

$$(x,y,z) = (-1,3,-5) \Rightarrow Q' = (-1,3,-5)$$